
第3章 量纲分析与控制方程的无量纲化

Chapter 3 • Dimensional Analysis and Nondimensionalization

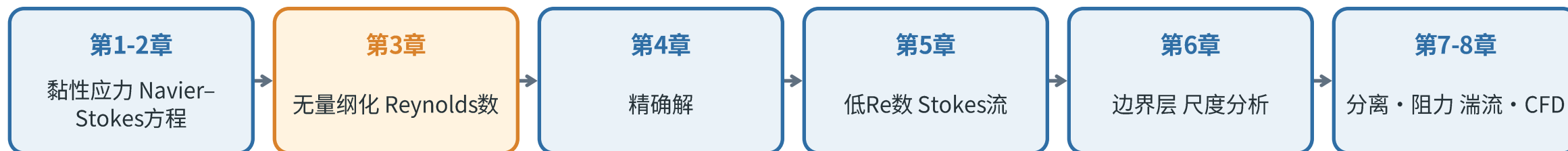
课程：黏性流体力学

授课教师：徐翱

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

本章在课程中的位置

课程主线：黏性作用 → 方程 → 尺度 → 流动结构 → 工程应用



前章提供了什么？

- 第2章建立了不可压缩 Navier-Stokes 方程，但仍以有量纲变量表示
- 不便直接识别控制参数，也不利于比较不同尺度、实验或数值工况

本章解决什么新问题？

- 通过选取特征尺度改写变量和方程，将复杂有量纲问题重新组织为由少数无量纲参数控制的问题
- 核心作用：减少独立参数数量；把不同物理机制的相对重要性显式写进控制方程

本章结论将在第4-8章反复使用：精确解、Stokes流、边界层、分离阻力、湍流均以无量纲参数组织。

学习目标

- 1 区分物理量、数值、单位和量纲，并用量纲齐次性检查物理方程
- 2 为给定问题选择特征长度、速度、时间和压强尺度，正确变换变量及其导数
- 3 将控制方程、初始条件和边界条件作为一个整体无量纲化
- 4 从作用比、时间尺度比和方程系数三个角度解释 Reynolds 数
- 5 比较惯性与黏性压强尺度，从方程项比值解释 St、Eu 和 Fr 的来源
- 6 使用 Buckingham Π 定理和量纲矩阵进行简单的参数归并
- 7 区分几何相似、运动相似和动力相似，用无量纲变量组织可塌缩数据
- 8 （拓展）说明不可压缩非等温流动中 Pr 与 Ra 如何由新增输运机制产生

教学重点与难点

教学重点

- 特征尺度的选择原则与物理意义
- 控制方程（含导数）的完整无量纲化过程
- Reynolds 数的三种等价理解
- St、Eu、Fr 与方程项比值的对应关系
- 不同压强尺度下无量纲方程的等价性
- 动力相似的本质与参数匹配
- 无量纲化使实验数据塌缩的方法论

教学难点

- 导数变换中尺度因子的正确处理 ($\partial/\partial x \neq \partial/\partial x^*$)
- 理解"系数小不等于对应项处处很小"——边界层的伏笔
- 不同特征尺度产生形式不同但等价的无量纲方程
- 无量纲化不是机械换元，而是物理判断
- 动力相似不是简单匹配 Reynolds 数
- Buckingham Π 定理的局限：不能给出函数关系

前章回顾与问题导入

回顾：第2章我们得到了什么？

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + \rho g$$

问题：这个方程包含 $\rho, \mu, U, L, \Delta p, g$ 等多个有量纲参数——

参数太多

不同实验条件下， ρ, μ, U, L 各自变化，结果难以直接比较

机制不明

惯性、黏性、压力、重力各自多重要？无法从有量纲方程直接看出

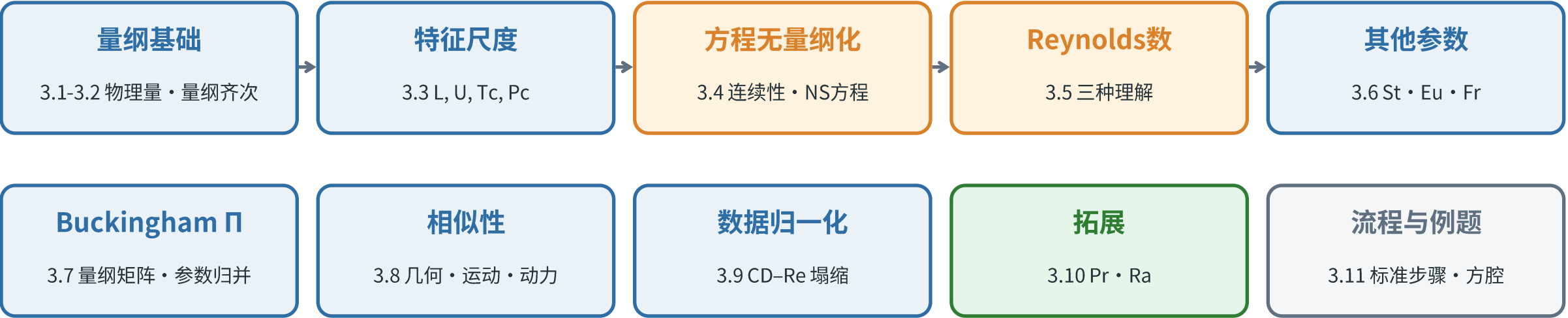
尺度缺失

大到飞机、小到微通道，同样的方程描述完全不同的流动 regime

核心问题：如何将复杂的有量纲问题重新组织为由少数控制参数支配的问题？

答案：无量纲化（nondimensionalization）——选取特征尺度改写变量和方程，使物理机制的相对重要性显式显现。

本章知识结构



核心主线：有量纲方程 → 选择特征尺度 → 无量纲方程 → Re, St, Eu, Fr → 物理机制相对强弱 → 动力相似与可推广规律

教学设计说明：

- 问题驱动：从有量纲方程的困境出发，自然引出无量纲化的必要性
- 尺度思维贯穿全章：每个无量纲参数都对应方程中两项物理机制的竞争
- 互动与评价分散在关键节点：量纲判断、特征尺度选择、Re变化预测、错误识别

物理量、单位与量纲

3.1 物理量 = 数值 × 单位

$$Q = \{\text{数值}\} \times [\text{单位}]$$

示例：U = 2.0 m/s = 200 cm/s 物理量本身不变，数值和单位随单位制改变

核心原则：物理规律不应该依赖人为选择的单位制——这正是量纲分析能够成立的基础。

基本量纲（经典流体力学）

[M] 质量	[L] 长度	[T] 时间	[Θ] 温度（传热时引入）
--------	--------	--------	---------------

本章主要讨论等温黏性流动，通常只需 M, L, T 三个基本量纲。

常见物理量的量纲（推导示例）

速度 U	LT ⁻¹	加速度 a	LT ⁻²
密度 ρ	ML ⁻³	压强/应力 p, τ	ML ⁻¹ T ⁻²
动力黏度 μ	ML ⁻¹ T ⁻¹	运动黏度 ν	L ² T ⁻¹

常见物理量量纲推导

从定义出发推导量纲

压强 p

$$p \sim \frac{\text{力}}{\text{面积}} [p] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

剪切应力 τ 具有相同量纲

动力黏度 μ

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} [\mu] = \frac{[\tau]}{[du/dy]} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

Newton 黏性定律

运动黏度 ν

$$\nu = \mu/\rho [\nu] = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1}$$

与扩散系数同量纲；
热扩散率 α 也是 L^2T^{-1}

教学提示

- 量纲推导的关键：从物理定义或定律出发，将每个量分解为基本量纲的组合
- ν 与 α 同量纲 (L^2T^{-1}) 不是巧合——二者都是扩散系数，其比值构成 Prandtl 数（见3.10节）

课堂互动：量纲判断

互动 1 / 8 · 概念预测

有人提出：黏性影响传播的典型距离满足 $\delta \sim \nu t$
这个关系在量纲上是否可能正确？

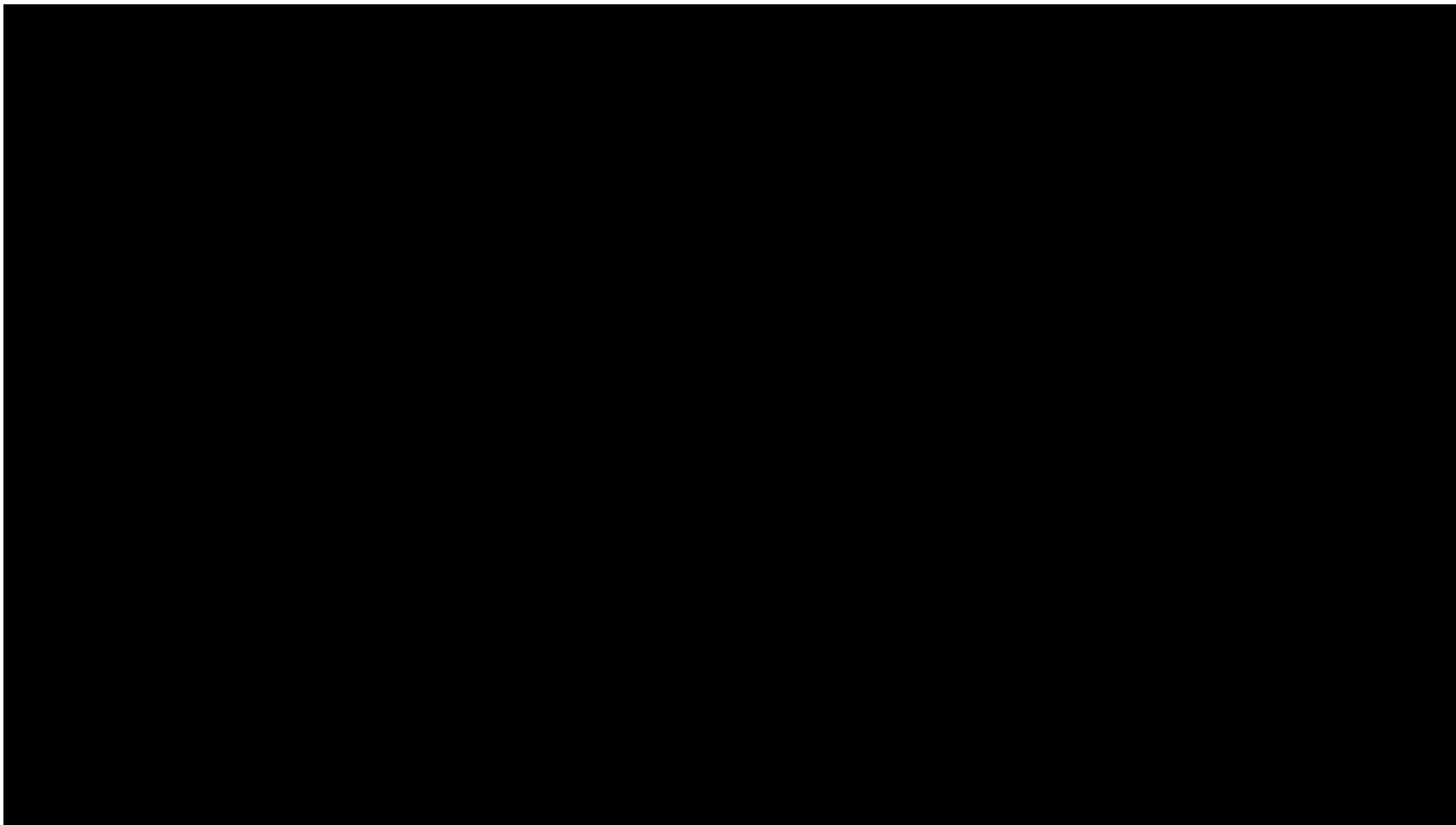
请先独立判断，再讨论。提示：分别计算 $[\nu t]$ 和 $[\delta]$ 的量纲。

参考答案

$[\nu t] = L^2 T^{-1} \times T = L^2$ ，而 δ 应具有长度量纲 L

量纲不匹配 $\rightarrow$ 该关系不可能正确。若改为 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ ，则 $[\sqrt{\nu t}] = L$ ，量纲正确。

拓展视频：公制为什么重要？



视频地址：<https://youtu.be/7bUVjJWA6Vw>

量纲齐次性：NS方程各项量纲检查

3.2 一个正确的物理方程，等号两边及每一项必须具有相同量纲

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla u = -\nabla p + \mu \nabla^2 u$$

非定常惯性项	$[\rho \partial_t u]$	$= \text{ML}^{-3} \times \text{LT}^{-2} = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$
对流惯性项	$[\rho u \cdot \nabla u]$	$= \text{ML}^{-3} \times \text{LT}^{-1} \times \text{T}^{-1} = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$
压强梯度项	$[\nabla p]$	$= \text{L}^{-1} \times \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2} = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$
黏性项	$[\mu \nabla^2 u]$	$= \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1} \times \text{L}^{-2} \times \text{LT}^{-1} = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$

所有四项量纲一致（ $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$ ）→ Navier–Stokes 方程量纲齐次

量纲检查的价值：不能证明公式一定正确，但能快速发现漏掉长度尺度、指数写错、 μ 与 ν 混用、压强与压强梯度混淆、代码中变量单位不一致等问题。

例3.1：扩散长度尺度的量纲检查

先检查量纲，再相信公式

假设： $\delta \sim \nu t$

量纲检查：

$$[\nu t] = L^2 T^{-1} \times T = L^2$$

$$[\delta] = L \text{ (应为长度)}$$

$L^2 \neq L \rightarrow$ 不可能正确

修正： $\delta \sim \sqrt{\nu t}$

量纲检查：

$$[\sqrt{\nu t}] = \sqrt{L^2} = L$$

$$[\delta] = L$$

量纲正确 $\rightarrow$ 可能成立

重要提醒

- 量纲正确只是必要条件，不是充分条件—— $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ 量纲正确，但具体关系需由控制方程求解确定
- 在科研中，一个新得到的公式、拟合关系或数值结果，第一项检查往往应该是：量纲是否正确？

物理意义： ν 是动量扩散系数 ($L^2 T^{-1}$)，扩散距离与时间的平方根成正比——这是扩散过程的普适特征，与热扩散、分子扩散完全类似。

无量纲变量与特征尺度

3.3 对具体流动问题，识别代表性尺度并定义无量纲变量

特征长度 L

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}/L$$

特征速度 U

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/U$$

特征时间 T_c

$$t^* = t/T_c$$

特征压强 P_c

$$p^* = (p - p_{\text{ref}})/P_c$$

尺度选择原则：合理尺度通常使主要区域中的主要变量为 $O(1)$ 。

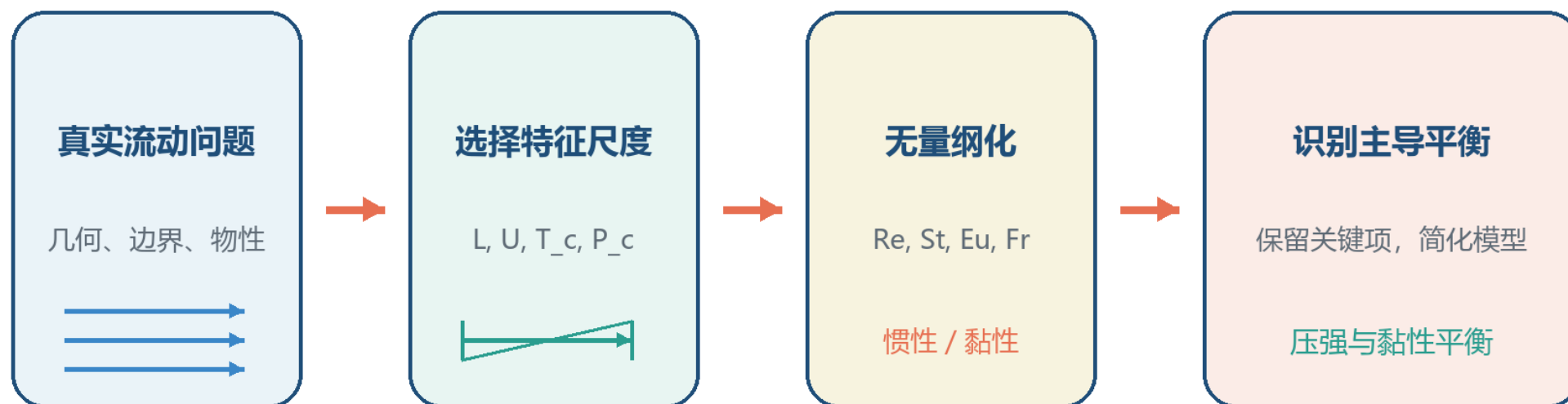
注意： $O(1)$ 是尺度选择原则，不是逐点要求

- 边界层或其他局部内层中，导数可能随小尺度而增大
- 尖角、起动瞬间和其他奇异点附近可能出现异常梯度
- 远场或匹配外区中的某些扰动量可能远小于 $O(1)$

上标 $*$ 表示无量纲变量。无量纲化的关键不是只替换变量本身，还要正确处理导数 $(\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*})$ ——这是3.4节的核心内容。

从真实流动到主导平衡的分析链

特征尺度的选择决定哪些物理机制以何种无量纲参数
显现在模型中



尺度选择决定哪些物理机制在模型中显现

教学解读：尺度选择不是数学技巧，而是物理判断——选择不同的 L, U, T_c, P_c ，会突出不同的主导平衡。

特征尺度不是唯一的

同一个流动问题可以采用不同的特征尺度，关键是定义必须明确

$$Re_D = \frac{UD}{\nu}, \quad Re_R = \frac{UR}{\nu}, \quad Re_D = 2Re_R$$

圆管流动：长度尺度可取管径 D 或管半径 R，对应 Reynolds 数相差常数因子 2。

引用临界 Reynolds 数或经验关联式时，必须明确特征长度是如何定义的！

- 引用临界 Reynolds 数或经验关联式时，必须明确特征长度是如何定义的！

典型问题的尺度选择

流动问题	常用特征长度	常用特征速度
圆柱绕流	圆柱直径 D	来流速度 U_∞
管内流动	水力直径 D_h	截面平均速度 U_b
Couette 流	壁面间距 h	壁面速度 U_w
外部边界层	流向长度 L	来流速度 U_∞

选择不是查表得到的唯一答案，而是由研究对象和所关注的物理过程决定的。

课堂互动：特征尺度选择

互动 2 / 8 · 工程情境判断

情境：水在直径 $D = 2 \text{ cm}$ 的圆管中以平均速度 $U_b = 0.5 \text{ m/s}$ 流动。

问题1：应选择什么作为特征长度和特征速度？

问题2：若有人用管半径 R 计算 Reynolds 数，结果与用管径 D 有何关系？

请独立思考后与同桌讨论。 $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

参考答案

问题1：特征长度取水力直径 $D_h = D = 0.02 \text{ m}$ ，特征速度取截面平均速度 $U_b = 0.5 \text{ m/s}$ 。 $Re_D = U_b \frac{D}{\nu} = 10^4$ （湍流）。

问题2： $Re_R = \frac{U_b R}{\nu} = \frac{Re_D}{2} = 5 \times 10^3$ 。物理流动完全相同，只是 Reynolds 数的定义不同——引用时必须说明特征长度。

导数的尺度变换：无量纲化的关键步骤

3.4.1 关键不是只替换变量，还要正确处理导数

$$x = Lx^* \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}$$

一阶空间导数

$$\nabla = \frac{1}{L} \nabla^*, \quad \nabla^2 = \frac{1}{L^2} \nabla^{*2}$$

梯度与Laplacian

$$t = T_c t^* \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{T_c} \frac{\partial}{\partial t^*}$$

时间导数

速度分量的导数变换：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U}{T_c} \frac{\partial u^*}{\partial t^*}$$

非定常项

$$u \cdot \nabla u = \frac{U^2}{L} u^* \cdot \nabla^* u^*$$

对流项

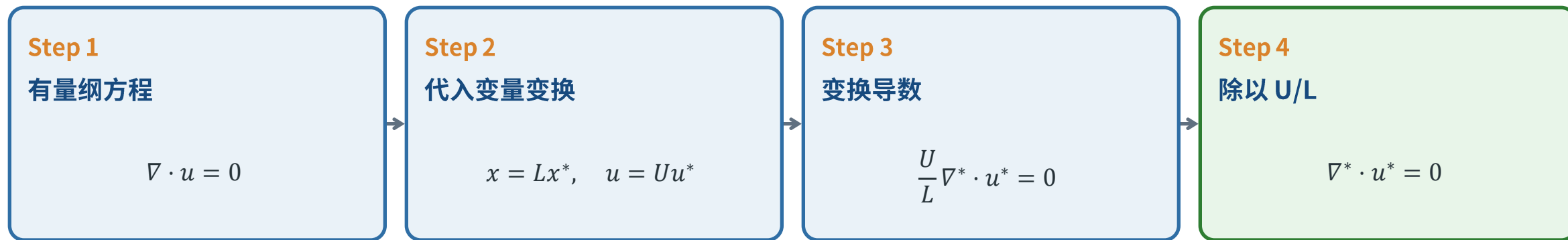
$$\nabla^2 u = \frac{U}{L^2} \nabla^{*2} u^*$$

黏性项

常见错误： $\partial u / \partial x$ 不是简单变成 $\partial u^* / \partial x^*$ ，而是 $(U/L) \partial u^* / \partial x^*$ ——导数变换必须带上尺度因子！

连续性方程的无量纲化

3.4.2 不可压缩连续性方程在无量纲化后形式保持不变



结论：不可压缩连续性方程无量纲化后形式不变——不引入任何无量纲参数

物理意义：连续性方程表达的是质量守恒，它不涉及惯性、黏性等物理机制的竞争，因此无量纲化后不产生 Reynolds 数等控制参数。所有物理机制的竞争都出现在动量方程中。

教学提示：这一步看似简单，但它建立了无量纲化的标准流程——变量替换 → 导数变换 → 除以参考尺度 → 得到无量纲方程。

Navier-Stokes方程无量纲化（一）：选择尺度

3.4.3 无体力不可压缩 NS 方程 → 选择对流时间尺度和惯性压强尺度

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u$$

选择特征尺度：

长度	$x = Lx^*$	几何尺度
速度	$u = Uu^*$	来流/特征速度
时间	$t = \frac{L}{U} t^*$	对流时间尺度：流体以U穿越L的时间
压强	$p = p_{\text{ref}} + \rho U^2 p^*$	惯性压强尺度：与惯性项同阶

为什么选择这些尺度？

- 对流时间 L/U 使非定常项与对流项具有相同参考尺度（ $St=1$ ），适合定常或缓变流动
- 惯性压强 ρU^2 使压强梯度项与惯性项同阶，适合惯性显著的流动；黏性主导流动应选 $\mu U/L$ （见3.6.2）

Navier-Stokes方程无量纲化（二）：各项变换

代入尺度变换，保留所有尺度因子

非定常项

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{U^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*}$$

尺度： $\rho U^2/L$

对流项

$$\rho u \cdot \nabla u = \rho \frac{U^2}{L} u^* \cdot \nabla^* u^*$$

尺度： $\rho U^2/L$

压强梯度

$$\nabla p = \rho \frac{U^2}{L} \nabla^* p^*$$

尺度： $\rho U^2/L$

黏性项

$$\mu \nabla^2 u = \mu \frac{U}{L^2} \nabla^{*2} u^*$$

尺度： $\mu U/L^2$

观察：前三项具有相同尺度 $\rho U^2/L$ ，黏性项尺度为 $\mu U/L^2$ 。

$$\text{惯性项尺度/黏性项尺度} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu} = Re$$

Reynolds 数自然出现：它是惯性作用与黏性作用的尺度之比。

Navier-Stokes方程无量纲化（三）：归一化与Reynolds数

全部除以 $\rho U^2/L$ ，得到无量纲动量方程

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*$$

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

方程各项 ↔ 物理作用映射：

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$$

非定常惯性

$$u^* \cdot \nabla^* u^*$$

对流惯性

$$-\nabla^* p^*$$

压力梯度

$$\frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*$$

黏性扩散

这就是 Reynolds 数从控制方程中出现的过程。它不是人为定义参数，而是惯性项与黏性项尺度之比的自然结果。下一节将从三个角度深入理解它的物理含义。

Reynolds数的第一种理解：惯性与黏性作用之比

3.5 从有量纲方程直接比较两项的典型尺度

$$Re = \frac{\text{典型惯性项尺度}}{\text{典型黏性项尺度}} = \frac{\rho U^2 / L}{\mu U / L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

惯性作用尺度

$$\rho(\partial u / \partial t) \sim \rho U^2 / L$$

$$\rho(u \cdot \nabla) u \sim \rho U^2 / L$$

流体保持原有运动状态的趋势

黏性作用尺度

$$\mu \nabla^2 u \sim \mu U / L^2$$

流体层间摩擦力阻碍相对运动

动量通过分子扩散传递

不同 Reynolds 数极限对应的物理平衡：

$Re \ll 1 \rightarrow$ 黏性主导

黏性扩散迅速影响整个流场 Stokes 流（第5章）

$Re \sim O(1) \rightarrow$ 惯性与黏性竞争

两项均不可忽略 需完整求解 NS 方程

$Re \gg 1 \rightarrow$ 惯性主导（整体）

黏性集中于壁面薄层 边界层理论（第6章）

Reynolds数的第二种理解：时间尺度之比

黏性动量扩散时间 vs 对流时间——"黏性是动量扩散"的直观解释

$$Re = \frac{\text{黏性扩散时间尺度}}{\text{对流时间尺度}} = \frac{t_v}{t_c} = \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{UL}{\nu}$$

$$\text{对流时间 } t_c = \frac{L}{U}$$

流体微团以速度 U 穿越长度 L 所需时间
描述对流运输的快慢

$$\text{黏性扩散时间 } t_v = \frac{L^2}{\nu}$$

黏性动量扩散跨越长度 L 所需时间（由 $\delta \sim \sqrt{(\nu t)}$ 导出）
描述分子动量扩散的快慢

物理解读：

$$Re \ll 1$$

$$t_v \ll t_c$$

黏性扩散远快于对流——黏性能够迅速影响整个流动尺度

$$Re \gg 1$$

$$t_v \gg t_c$$

对流远快于黏性跨越整个尺度的扩散——黏性来不及影响远场

Reynolds数的第三种理解：方程系数与重要警示

无量纲 NS 方程中黏性项前的系数为 $1/Re$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*$$

最重要警示：系数小并不意味着黏性项在所有位置都可以直接删除！

- 当 Re 很大时， $1/Re$ 很小，但 $\nabla^{*2} u^*$ 本身可能在某些区域非常大
- 高 Reynolds 数壁面流动正是最典型的情况——壁面附近速度梯度可以非常大
- 使黏性项即使乘以 $1/Re$ ，仍然保持重要——这是边界层理论的出发点（第6章）

数学上的原因：

$$\frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* \sim \frac{1}{Re} \cdot \frac{U^*}{\delta^{*2}} \sim \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{\delta^{*2}}$$

若近壁薄层厚度 $\delta^* \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$ ，则 $\left(\frac{1}{Re}\right) \cdot \left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right) \sim \left(\frac{1}{Re}\right) \cdot Re = O(1)$ ——黏性项仍然重要！这就是边界层的尺度分析，第6章将系统展开。

Reynolds数的三种等价理解（总结）

同一个参数，三种视角——作用比、时间尺度比、方程系数

Reynolds 数的三种等价理解



提示：三种理解等价，但适用于不同场景——作用比适合力平衡分析，时间尺度比适合扩散直觉，方程系数适合极限讨论。

课堂互动：Reynolds数变化判断

互动 3 / 8 · 数量级判断

Q1

速度增加 2 倍、特征长度减小一半，Reynolds 数如何变化？

参考答案： $Re = UL/\nu \rightarrow (2U)(L/2)/\nu = UL/\nu \rightarrow$ 不变

Q2

同一种流体（ ν 不变），能否同时具有 $Re = 10^{-2}$ 和 $Re = 10^6$ 的流动？

参考答案：可以！ Re 不是流体物性，取决于 U 和 L 。微通道低速 $\rightarrow Re$ 极小；飞行器高速 $\rightarrow Re$ 极大

Q3

看到 $1/Re = 10^{-5}$ ，能否直接删除 NS 方程中的黏性项？

参考答案：不能！系数小不代表项小。壁面附近 $\nabla^2 u^*$ 可能很大，黏性项仍可能重要（边界层）

独立时间尺度与Strouhal数

3.6.1 当流动存在外加时间尺度时，非定常项与对流项的比值引出 St

适用场景：周期振荡、脉动入口、周期性来流、外部强迫、涡脱落等存在独立时间尺度的流动

$$t = T_c t^* \text{非定常项尺度} = \rho \frac{U}{T_c}, \quad \text{对流项尺度} = \rho \frac{U^2}{L}$$

$$St = \frac{fL}{U} = \frac{L}{UT_c}, \quad f \sim 1/T_c$$

$$St \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*$$

参数角色：

St

控制非定常项相对于对流项的重要程度

Re

控制黏性项相对于惯性项的重要程度

若选择 $T_c = \frac{L}{U}$ （对流时间尺度），则 $St = 1$ ，3.4节的无量纲化实际上把 St 吸收到了时间变量定义中。

压强尺度的选择：惯性压强 vs 黏性压强

3.6.2 压强的无量纲化不只有一种自然选择——选择本身就是物理判断

惯性压强尺度 $P_c = \rho U^2$

$$p = p_{ref} + \rho U^2 p^*$$

压强梯度项与惯性项同阶

适合惯性显著的流动（高Re）

外流压强系数 C_p 即此变体

黏性压强尺度 $P_\mu = \frac{\mu U}{L}$

$$p = p_{ref} + \left(\frac{\mu U}{L}\right) p^*$$

压强梯度项与黏性项同阶

适合黏性主导的流动（低Re）

第5章 creeping flow 自然出现

两种归一化得到形式不同但完全等价的方程：

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*$$

惯性尺度归一化 → 突出高Re极限

$$Re \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* \right) = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2} u^*$$

黏性尺度归一化 → 突出低Re极限

- 两种写法中的 p^* 定义不同，不能把数值直接逐点比较；恢复为有量纲压强后才描述同一物理量
- 阅读不同教材或软件手册时，必须先核对参考尺度的定义

Euler数与压强系数

3.6.2 一般压强尺度 Δp 引出 Euler 数——压强作用与惯性作用之比

$$p = p_{\text{ref}} + \Delta p \, p^* \frac{\text{压强梯度项}}{\text{惯性项}} = \frac{\Delta p / L}{\rho U^2 / L} = \frac{\Delta p}{\rho U^2} = Eu$$

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$$

$$St \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -Eu \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* + \frac{1}{Fr^2} e_g$$

Euler 数 vs 压强系数 C_p :

$$C_p = \frac{p - p_{\text{ref}}}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2} C_p = 2Eu$$

- 本书采用 $Eu = \Delta p / (\rho U^2)$ ，压强系数采用动压 $\frac{1}{2} \rho U^2$ 归一化 $\rightarrow C_p = 2Eu$
- 部分文献把 Euler 数定义为 $\Delta p / (\frac{1}{2} \rho U^2)$ ，此时与压强系数数值一致。常数因子不代表物理差异，查阅文献时应先核对定义。

重力尺度与Froude数

3.6.3 保留重力项时，惯性作用与重力作用之比引出

Fr

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + \rho g$$

惯性尺度归一化后，重力项系数 = $\frac{gL}{U^2} = \frac{1}{Fr^2}$, $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* + \frac{1}{Fr^2} e_g$$

Froude 数衡量惯性作用与重力作用的相对关系，在以下问题中尤其重要：

自由表面流动

船舶水动力学

明渠流动

重力波

对于很多封闭不可压缩流动，如果密度常数且重力可以吸收到修正压强中，则不一定需要显式保留 Fr。

统一的无量纲Navier-Stokes形式

3.6.4 所有无量纲数都是控制方程中不同物理机制竞争关系的量度

$$St \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -Eu \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* + \frac{1}{Fr^2} e_g$$

无量纲参数 ↔ 物理机制

Re

惯性作用与黏性作用

St

非定常变化与对流输运

Eu

压强作用与惯性作用

Fr

惯性作用与重力作用

核心认识

无量纲数不是需要彼此孤立记忆的一组定义。
对陌生流动问题，应先判断哪些物理机制可能重要，再选择相应尺度并识别控制参数。
而不是先机械地罗列所有熟悉的无量纲数。

无量纲化不是机械换元——"用什么尺度除"本身就是物理判断。不同尺度选择可以把不同的主导机制突出出来。

课堂互动：无量纲参数匹配

互动 4 / 8 • 方程项判断

对以下三类工程流动，判断最需要注意哪些无量纲参数，并说明理由。

案例A

圆柱绕流的周期性涡脱落（空气， $U_\infty = 10 \text{ m/s}$ ， $D=0.1 \text{ m}$ ）

→ 关键参数：Re（惯性-黏性）+ St（涡脱落周期）

案例B

船舶在水面航行的兴波阻力（自由表面，重力重要）

→ 关键参数：Re（黏性）+ Fr（惯性-重力）

案例C

微通道中低压差驱动的定常层流（ $L=100 \mu\text{m}$ ， $U=1 \text{ mm/s}$ ）

→ 关键参数：Re（极低，黏性主导）+ Eu（压强-惯性）

根据物理机制判断控制参数，而不是机械罗列所有无量纲数。

Buckingham Π 定理：基本思想

3.7 当未必掌握完整控制方程时，量纲分析仍可帮助减少变量数量

若问题由 n 个有量纲变量决定，涉及 r 个独立基本量纲，则可改写为 $n - r$ 个独立无量纲组合的关系

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0$$

示例：圆柱或球体阻力问题

假设阻力 F_D 由 ρ, U, L, μ 决定（含响应量共5个变量），涉及 M, L, T 三个基本量纲：

$$n = 5, \quad r = 3 \text{ 独立无量纲组合数} = n - r = 2$$

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho U^2 L^2}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho U L}{\mu} = Re \frac{F_D}{\rho U^2 L^2} = \mathcal{F}(Re)$$

若定义阻力系数 $C_D = \frac{1}{2} \frac{F_D}{\rho U^2 A}$ ，则 $C_D = f(Re)$ ——原先4个参数归并为单一控制参数 Re 。

Buckingham Π 定理：量纲矩阵计算流程

把"凑指数"转化为线性代数问题：求量纲矩阵的零空间



不同零空间基底可能给出外观不同的 Π 组，但可相互组合，包含的物理信息相同。

Buckingham Π 定理的局限与方法比较

量纲分析能识别无量纲变量，但通常不能给出具体函数关系

重要局限

- $C_D = f(Re)$ 不能仅凭量纲分析进一步确定为 $C_D = 24/Re$
- 后一个结果来自低 Reynolds 数球体绕流控制方程的求解（第5章）
- 量纲分析能够识别应出现的无量纲变量，却通常不能给出它们之间的具体函数关系

控制方程无量纲化 vs Buckingham Π 定理：

控制方程无量纲化（本书主方法）

- 保留各项对应的物理机制及相对系数
- 适合研究极限、主导平衡和数值模型
- 需要预先掌握完整控制方程
- 可解释每个无量纲参数的物理来源
- 本书以控制方程无量纲化为主

Buckingham Π 定理（补充方法）

- 不要求预先掌握完整控制方程
- 适合减少实验参数并整理经验关系
- 只能给出无量纲组合的数量，不能给函数形式
- 无法直接解释参数的物理机制
- 作为控制方程无量纲化的补充

两种方法都会产生无量纲参数，但解决的问题不同，应根据是否掌握控制方程选择使用。

几何相似、运动相似与动力相似

3.8 无量纲化的重要应用：建立不同尺度流动之间的相似性

几何相似

所有对应长度的比例相同

$$\frac{L_1^{(m)}}{L_1^{(p)}} = \frac{L_2^{(m)}}{L_2^{(p)}} = \lambda_L$$

只说明边界形状对应，不保证流场相似

运动相似

对应位置速度方向相同，所有对应速度保持统一比例

$$u^{*(m)}(x^*, t^*) = u^{*(p)}(x^*, t^*)$$

两种流动具有相同的无量纲速度场

动力相似

无量纲控制方程、边界条件相同，关键无量纲参数相同

$$Re_m = Re_p \quad (\{\text{惯性-黏性主导时}\})$$

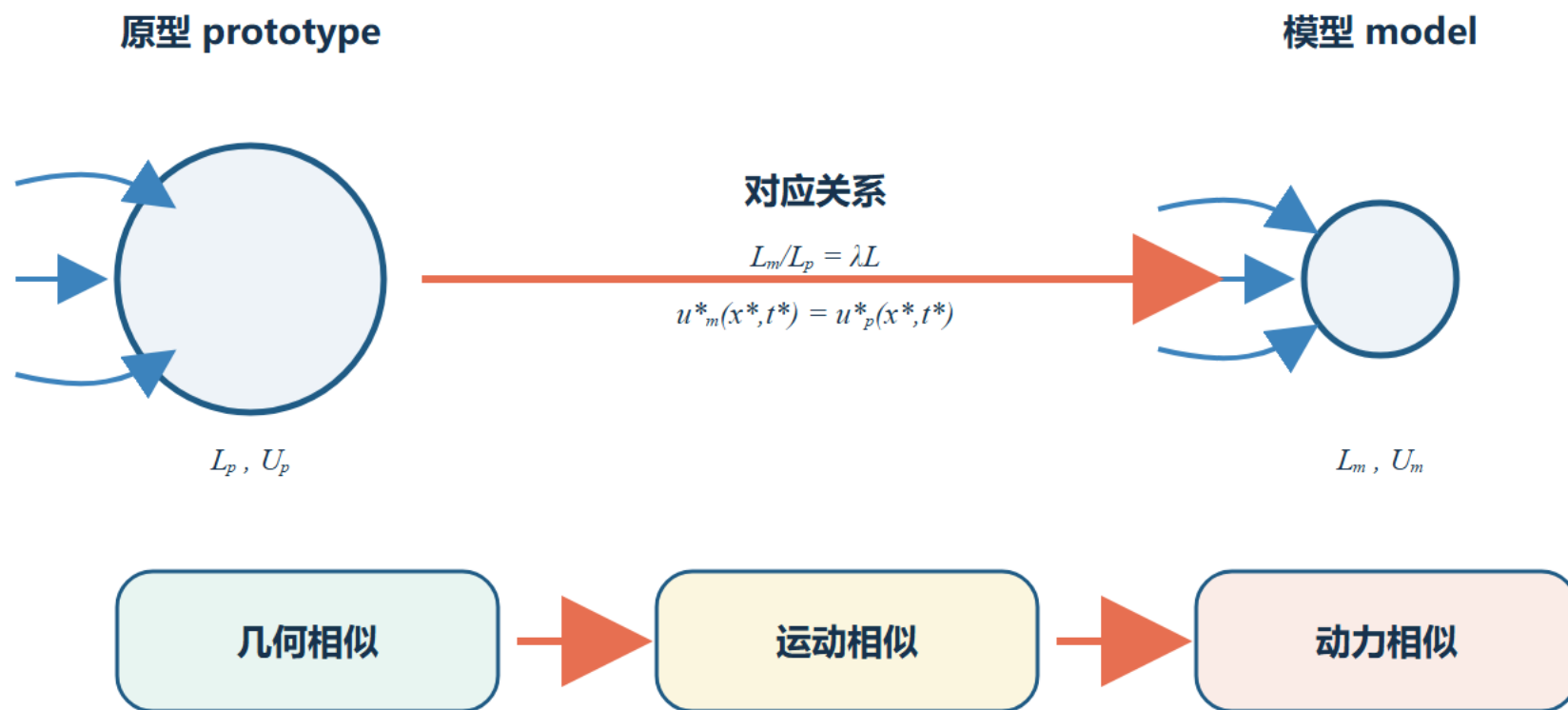
模型试验能代表原型的最严格条件

相似性要求逐级增强：几何相似 → 运动相似 → 动力相似。仅几何相似不能保证模型流动与原型相同。

模型与原型：从几何相似到动力相似

缩尺模型试验的前提：两者在控制流动的关键无量纲参数上具有一致性

模型与原型：从几何相似到动力相似



风洞/水洞试验中，仅仅把几何尺寸按比例缩小不能保证流动相同——必须满足动力相似条件。

动力相似的本质：不是简单匹配Reynolds数

需要匹配哪些无量纲参数，取决于问题中哪些物理机制真正参与主导平衡

问题中的主要机制	需要重点匹配的参数
惯性—黏性	Re
惯性—黏性—重力	Re, Fr
惯性—黏性—独立非定常过程	Re, St

动力相似的本质：使控制当前问题的无量纲模型保持一致
而不是"所有问题都匹配 Reynolds 数"

实际缩尺实验的困难

- 不同无量纲参数有时无法同时匹配（如 Re 和 Fr 同时要求时，同一种流体难以满足）
- 必须根据研究目标判断哪个机制最重要，并明确模型试验在哪些方面能代表原型、哪些存在尺度效应
- 解释模型试验结果时必须同时说明采用了什么相似准则，以及仍存在哪些不可避免的尺度效应

Reynolds相似的缩尺算例

例3.2: 缩尺模型为达到原型Reynolds数，往往需要很高的试验速度

$$Re_m = Re_p \frac{U_m L_m}{\nu_m} = \frac{U_p L_p}{\nu_p}$$

若使用同一种流体 ($\nu_m = \nu_p$)，则 $U_m L_m = U_p L_p$ ：

例3.2 计算过程

已知：原型 $L_p = 2 \text{ m}$ ， $U_p = 5 \text{ m/s}$ ；1:10 缩尺模型 $L_m = 0.2 \text{ m}$ ；相同流体 $\nu_m = \nu_p$

Reynolds 相似要求：

模型尺寸缩小10倍 → 速度必须增大10倍！

工程意义：

- 大型飞机、船舶、车辆和建筑物的缩尺试验中，实际尺度 Reynolds 数可能难以完全复现
- 实验模型可以做到几何相似，但动力相似往往受限于试验风速、水速或流体物性

课堂互动：缩尺实验判断

互动 5 / 8 · 工程情境分析

情境：某船舶原型 $L_p = 150 \text{ m}$ ，航速 $U_p = 10 \text{ m/s}$ 。建立 1:50 缩尺模型，使用相同水。

问题1：若要求 Reynolds 相似，模型航速应为多少？是否现实？

问题2：船舶兴波阻力还受重力影响，若同时要求 Fr 相似，模型航速应为多少？两个条件能同时满足吗？

参考答案

问题1：Re相似 $\rightarrow U_m = U_p \times \left(\frac{L_p}{L_m}\right) = 10 \times 50 \text{ m/s} = 500 \text{ m/s}$ （超音速！完全不现实）

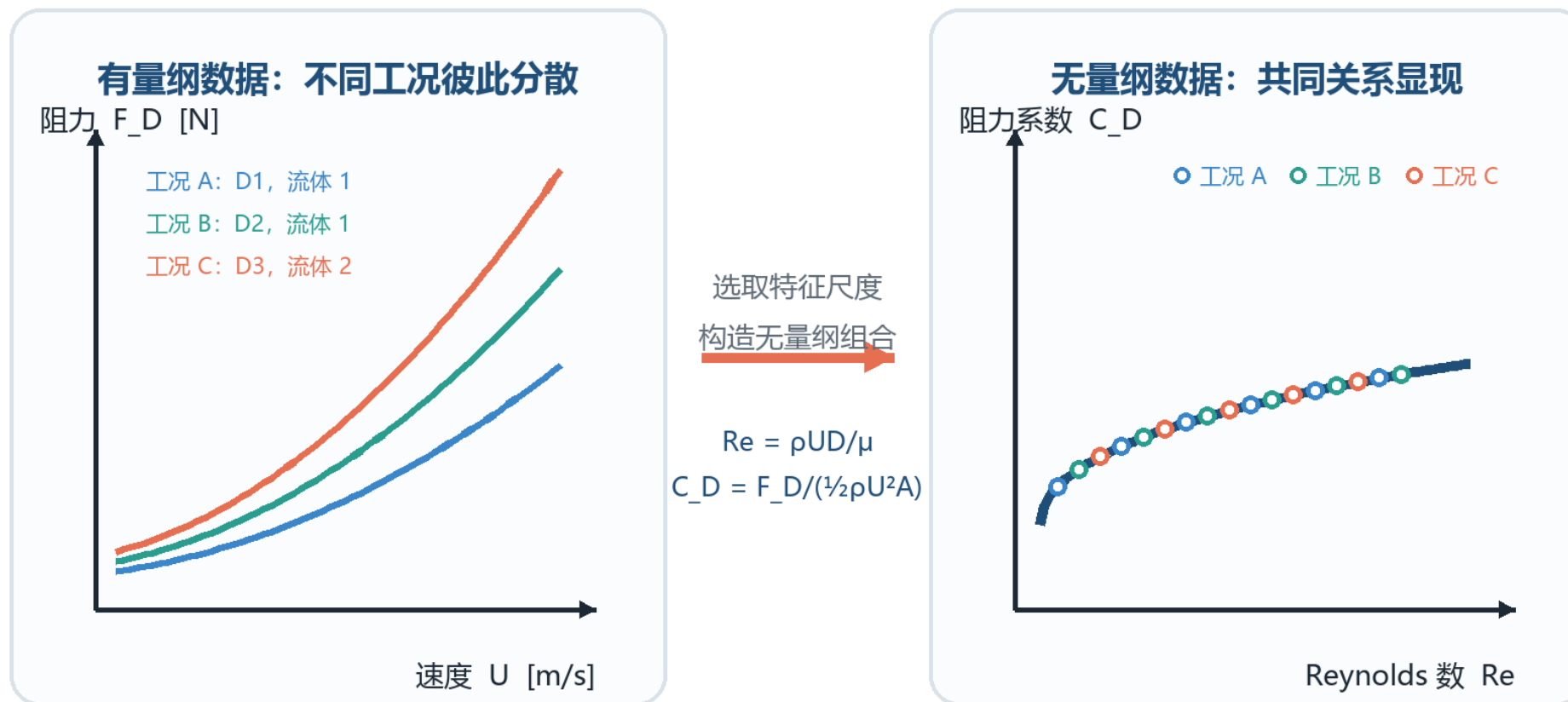
问题2：Fr相似 $\rightarrow U_m = U_p \times \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = 10 \times \sqrt{\frac{1}{50}} \text{ m/s} \approx 1.41 \text{ m/s}$

Re相似要求 $U_m \propto \frac{1}{L_m}$ ，Fr相似要求 $U_m \propto \sqrt{L_m}$ ——同一种流体下两个条件矛盾！

这就是船舶试验中 Re 和 Fr 无法同时满足的经典困境，实际试验通常优先保证 Fr 相似（兴波阻力），Re 用经验修正。

无量纲化与实验数据归一化

3.9 有量纲数据缺乏普适性，无量纲化使不同工况数据发生"塌缩"



F_D - U 曲线因直径、流体不同而分散；改用 C_D - Re 后，各组结果落到同一共同趋势附近。

无量纲数据归一化的工程实例

无量纲化使可推广的物理规律显现——后续章节将不断遇到这种处理方式

管流摩擦系数	$f vs Re$	Moody图：不同管径、流体、流速的数据塌缩为单一曲线
压强系数	$C_p vs x/L$	翼型表面压强分布用无量纲坐标和压强系数表示
升力系数	$C_L vs Re, \alpha$	不同翼型、尺寸、速度的升力数据归并为 $C_L(Re, \alpha)$
Strouhal数	$St vs Re$	圆柱涡脱落频率用 $St=fD/U$ 对 Re 作图，揭示临界行为
壁面无量纲	$u + vs y +$	湍流近壁速度分布用 $u^+=u/u_\tau, y^+=yu_\tau/\nu$ 表示，不同流动塌缩

课程思政：无量纲化体现了科学建模的严谨性——从纷繁复杂的有量纲数据中提炼普适规律，是工程科学的核心方法论。

拓展：不可压缩非等温流动与Prandtl数

3.10.1 当温度场参与输运时，新的扩散系数之比自然构成 Pr

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T, \quad [v] = [\alpha] = L^2 T^{-1}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{动量扩散率}}{\text{热扩散率}}$$

物理意义：

$Pr \ll 1$

热量扩散相对更快（如液态金属）

→ 热边界层比速度边界层厚

$Pr \sim 1$

动量扩散与热扩散相当（如气体）

→ 热边界层与速度边界层厚度相近

$Pr \gg 1$

动量扩散相对更快（如油、水）

→ 速度边界层比热边界层厚

重点不是记忆某种流体的 Pr 数值，而是理解它为什么由两个扩散系数之比自然出现——新的输运机制对应新的控制参数。

拓展：Boussinesq近似与Rayleigh数

3.10.2 温差引起浮力时，新的自然尺度引出 Ra

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 u + g\beta(T - T_0)e_g, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$$

选择热扩散尺度：L, $U_\alpha = \frac{\alpha}{L}$, $t_\alpha = \frac{L^2}{\alpha}$, ΔT , $\rho_0 U_\alpha^2$

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}, \quad \text{浮力项系数} = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha^2} = Ra \cdot Pr$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -\nabla^* p^* + Pr \nabla^{*2} u^* + Ra Pr T^* e_g$$

**方法论事实：当研究对象中加入新的运输机制和新的自然尺度时
无量纲化会自动告诉我们需要哪些新的控制参数**

本节只说明方法扩展，不预告后续将系统讲授自然对流。同一个问题还可采用其他尺度，最终方程形式可能不同但物理等价。

无量纲化标准流程与自检清单

3.11.1 对新的流体力学问题，按以下六步完成无量纲化

- 1

写出有量纲控制方程与边界条件

明确求解变量、物性参数、几何尺度和外部作用
- 2

选择特征尺度

根据问题定义 L, U, T_c, P_c ，必要时包括温度差等
- 3

定义无量纲变量并变换导数

$u=Uu^*, x=Lx^*$ ，同时使用 $\partial/\partial x = L^{-1} \partial/\partial x^*$
- 4

代入并选取参考项归一化

保留所有尺度因子，识别 Re, St, Eu, Fr 等参数
- 5

同步改写边界条件

控制方程无量纲化不意味着问题完整，初边值条件必须同尺度
- 6

检查数量级与物理含义

主要无量纲变量应合理，每个参数能从方程项比值解释

无量纲化对数值计算的作用

- 归并参数减少维数；使主要变量接近 $O(1)$ 改善条件数；参数扫描围绕无量纲控制量组织

无量纲化完成后的自检清单

完成推导后，逐项检查以下8个问题

1. L, U, T_c, P_c 的定义是否明确，并与研究对象一致？
2. 所有空间导数、时间导数和高阶导数是否都带上了正确的尺度因子？
3. 每一项是否真正无量纲？
4. 初始条件和边界条件是否同步改写？
5. 是否在同一方程中误用了不同基准尺度？
6. 主要无量纲变量是否大致为合理数量级？
7. 每个无量纲参数的物理含义是否能够从方程项的比值解释？
8. 在取 $Re \rightarrow 0$ 、 $Re \rightarrow \infty$ 等极限时，是否同时检查了局部梯度是否可能变大？

科研写作基本要求：论文中仅写出" $Re=1000$ "通常不够，还应明确构成 Reynolds 数的特征速度 U 和特征长度 L 分别如何定义。

完整例题：方腔顶盖驱动流（一）几何与尺度

例3.3 从控制方程到初边值条件的完整无量纲化

问题设定

- 二维方腔 $0 < x < L, 0 < y < L$
- 常密度、常黏度不可压缩 Newton 流体
- 初始时刻静止
- $t=0$ 起上壁以速度 $U e_x$ 匀速运动
- 其余三壁静止，忽略体力
- 求解变量： $u=(u,v), p$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u$$

$$x = Lx^*, y = Ly^*, u = Uu^*, t = \frac{L}{U}t^*, p = p_{\text{ref}} + \rho U^2 p^*$$

无量纲化结果

计算域变为单位正方形 $0 < x^* < 1, 0 < y^* < 1$

几何尺寸、壁面速度和物性参数被归并为单位计算域、单位顶盖速度和单一控制参数 $Re = UL/\nu$

这正是标准问题能够跨流体和跨尺度比较的原因

完整例题：方腔顶盖驱动流（二）方程与边界条件

控制方程、初始条件和边界条件必须作为一个整体无

$$\nabla^* \cdot u^* = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (u^* \cdot \nabla^*)u^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*, \quad Re = \frac{UL}{\nu}$$

初始条件（同步无量纲化）

$$u^*(x^*, y^*, 0) = 0$$

无滑移边界条件 ($t^* > 0$)

$$u^*(x^*, 1, t^*) = e_x, \quad u^*(x^*, 0, t^*) = 0, \quad u^*(0, y^*, t^*) = 0, \quad u^*(1, y^*, t^*) = 0$$

压强基准

- 封闭问题还需给出压强基准，例如令单位方腔内 p^* 的面积平均为零
- 固壁上的压强法向信息由动量方程和速度条件共同决定，不能再任意指定一套独立压强值

"主要变量为 $O(1)$ " 并非逐点要求：

- 顶盖速度确为 $O(1)$ ，但顶盖与侧壁交界处速度条件不连续，起动瞬间存在局部快速变化
- 角点和初始薄层中的梯度可以远大于整体尺度估计；实际数值计算常对顶盖起动或角点速度作平滑处理

无量纲化常见错误（上）

3.11.3 最容易犯的6类错误——前3类

错误1

只给变量加星号，但没有真正换元

不能在定义 $u^*=u/U$ 后直接把原方程中的 u 写成 u^* ；正确做法是代入 $u=Uu^*$ ，并同时变换所有空间和时间导数

错误2

忽略导数中的尺度因子

$\partial u / \partial x$ 不是简单变成 $\partial u^* / \partial x^*$ ，而是 $(U/L) \partial u^* / \partial x^*$ 。这是无量纲化中最常见的计算错误

错误3

特征长度定义不清

同一个圆管问题中，有时用半径 R ，有时用直径 D ，却仍然直接比较 Reynolds 数，导致常数因子错误

无量纲化常见错误（下）

3.11.3 后3类错误——尤其是错误6最危险

错误4

把 Reynolds 数当成流体物性

Re 不是流体本身的性质，而取决于 U, L 和 ν ；同一种流体可以具有极小或极大的 Reynolds 数

错误5

认为无量纲化只有唯一答案

只要定义自治，不同特征尺度都可能产生正确的无量纲方程。真正重要的是尺度选择是否有物理意义、变量是否为合理数量级

错误6

看到 $1/\text{Re} \ll 1$ 就立即删除黏性项

这是高 Reynolds 数分析中最危险的误区！必须同时考虑 $\nabla^2 u^*$ 是否可能很大。边界层理论正是对此问题的系统回答（第6章）

互动 6 / 8：某同学看到 $1/\text{Re} = 10^{-5}$ 后直接删除黏性项——评价这一做法（涉及系数大小、速度梯度、壁面、高Re、边界层）

数字赋能：Python计算无量纲参数

用代码建立控制方程 → 参数变化 → 数值结果 → 物理图像的联系

```
import numpy as np # 方腔顶盖驱动流参数
L = 1.0e-3 # m
U = 1.0 # m/s
nu = 1.0e-6 # m^2/s (水)
Re = U * L / nu
print(f"Re = {Re:.1f}") # 参数扫描: 不同 Re 下方腔流动
Re_values = [100, 400, 1000, 3200, 5000]
for Re in Re_values:
    U_needed = Re * nu / L
    print(f"Re={Re:5d}: U={U_needed:.2f} m/s")
```

计算结果

```
Re = 1000.0
Re= 100: U=0.10 m/s
Re= 400: U=0.40 m/s
Re= 1000: U=1.00 m/s
Re= 3200: U=3.20 m/s
Re= 5000: U=5.00 m/s
```

物理解读

- 无量纲化将 ρ, μ, U, L 归并为单一参数 Re
- 参数扫描只需改变 Re ，而非分别改变4个有量纲参数
- $Re=1000$ 对应层流方腔标准算例
- Re 增大 → 对流增强 → 主涡中心偏移

形成性评价（一）：概念判断

评价目标：检查学生能否建立控制方程—尺度—物理机制的关联

Q1

判断正误：Reynolds 数是流体的固有物性参数。

参考答案：错误。Re = UL/v ，取决于流动的 U 和 L，同一种流体可以有不同 Re。

Q2

判断正误：无量纲化的目的是消除单位，使计算更方便。

参考答案：不完全正确。核心目的是将有量纲问题重新组织为由少数无量纲参数控制的问题，揭示物理机制相对重要性。

Q3

单选：高 Reynolds 数流动中，黏性项（）

参考答案：A. 在整个流场中都可以忽略 B. 只在壁面附近重要 C. 完全不重要 D. 只在远场重要。答案：B——黏性集中于壁面薄层（边界层），但对整个外部流动产生关键影响。

备注：Q1诊断 Re 概念理解；Q2诊断无量纲化目的；Q3诊断高Re黏性分布。

常见错误：Q1选"正确"反映把 Re 当物性；Q3选 A 反映未理解边界层。

形成性评价（二）：方程项识别

评价目标：检查学生能否将方程中的数学项与物理作用对应

$$St \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla^* u^* = -Eu \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^* + \frac{1}{Fr^2} e_g$$

任务：将下列方程项与对应的物理作用和无量纲参数连线。

$St \frac{\partial u^*}{\partial t^*}$	↔ 非定常惯性	St
$u^* \cdot \nabla^* u^*$	↔ 对流惯性	(参考项)
$-Eu \nabla^* p^*$	↔ 压力梯度	Eu
$\frac{1}{Re} \nabla^{*2} u^*$	↔ 黏性扩散	Re
$\frac{1}{Fr^2} e_g$	↔ 重力	Fr

备注：本题诊断方程项—物理作用—无量纲参数的三重映射能力。常见错误：把 St 项与对流惯性混淆；把 Eu 与压强系数 Cp 的 1/2 因子混淆。

形成性评价（三）：工程情境分析

评价目标：检查学生能否将无量纲化方法迁移到真实工程问题

工程问题：某微通道换热器，通道宽度 $W = 100 \mu\text{m}$ ，水流速度 $U = 1 \text{ mm/s}$ ，水温 20°C ($\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)。

(1) 计算 Reynolds 数并判断流动 regime；(2) 选择合适的压强尺度并说明理由；(3) 若将通道放大100倍 ($W=1\text{cm}$)，保持 Re 不变需要多大流速？

参考答案与评分要点

(1) $Re = \frac{UW}{\nu} = \frac{(10^{-3})(10^{-4})}{10^{-6}} = 0.1 \rightarrow Re \ll 1$ ，黏性主导（层流，可能接近 Stokes 流）

(2) 应选择黏性压强尺度 $P_\mu = \frac{\mu U}{L}$ ，因为 $Re \ll 1$ 时压强梯度与黏性项同阶，而非与惯性项同阶

(3) Re 不变 $\rightarrow U_m W_m = U_p W_p \rightarrow U_m = U_p \times \left(\frac{W_p}{W_m}\right) = 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \times \left(\frac{1}{100}\right) = 10^{-5} \text{ m/s}$

评分要点：Re计算正确；regime判断正确；压强尺度选择及理由；缩尺计算正确。

备注：本题综合考查 Re 计算、regime 判断、压强尺度选择和缩尺计算。常见错误：(2) 仍选惯性压强 ρU^2 ；(3) 方向搞反。

本章知识链与全书主线

3.12 本章结论将在后续每一章反复使用



最核心的一步不是"把单位消掉", 而是把复杂有量纲问题重新组织成由少数无量纲参数控制的问题

本章知识在后续章节的应用:

- 第4章 用无量纲速度剖面描述精确解
- 第5章 以 $Re \ll 1$ 得到 Stokes 方程
- 第6章 以局部尺度解释高 Re 边界层
- 第7章 用 $C_D(Re)$, $St(Re)$ 组织分离流数据
- 第8章 用 u^+ , y^+ 等无量纲变量描述壁湍流

本章小结（一）：核心概念与关键公式

学生必须理解什么？必须掌握哪些公式？

核心概念

- 量纲齐次性：物理方程每一项必须同量纲
- 特征尺度：使主要变量为 $O(1)$ 的代表性尺度
- 无量纲化：将有量纲问题组织为少数参数控制的问题
- Reynolds 数：惯性与黏性作用之比（三种等价理解）
- $St/Eu/Fr$ ：非定常/压强/重力与惯性作用之比
- Buckingham Π ： $n-r$ 个独立无量纲组合
- 动力相似：无量纲方程、边界条件、关键参数一致

关键公式（表达什么物理平衡）

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

→ 惯性/黏性

$$St = \frac{fL}{U} = \frac{L}{UT_c}$$

→ 非定常/对流

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$$

→ 压强/惯性

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

→ 惯性/重力

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

→ 动量扩散/热扩散

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}$$

→ 浮力/黏性扩散

本章小结（二）：物理图像与能力回顾

学完本章后，学生能判断什么？估算什么？推导什么？
关键物理图像

- $Re \ll 1$ ：黏性扩散迅速影响整个流场
- $Re \gg 1$ ：黏性集中于壁面薄层（边界层伏笔）
- 尺度选择 $\rightarrow$ 主导平衡 $\rightarrow$ 无量纲参数显现
- 有量纲数据分散 $\rightarrow$ 无量纲化后数据塌缩
- 几何相似 $\subset$ 运动相似 $\subset$ 动力相似

能力目标（学生能……）

- 判断：给定量纲关系是否齐次
- 估算：给定流动的 Reynolds 数及 regime
- 推导：控制方程（含导数）的完整无量纲化
- 选择：根据物理机制判断特征尺度和控制参数
- 解释：每个无量纲参数比较了哪些物理作用
- 应用：用无量纲化组织实验数据和数值参数扫描
- 评价：CFD/实验结果中相似准则的满足程度

易错点回顾

- 符号： μ （动力黏度）与 ν （运动黏度）混用； Eu 与 C_p 的 $1/2$ 因子混淆
- 条件： $Re \gg 1$ 时直接删除黏性项（未考虑壁面梯度）；特征长度定义不清导致 Re 差常数因子
- 尺度：导数变换漏掉尺度因子；边界条件未同步无量纲化；把 Re 当流体物性

课后任务与思考讨论

与教材内容保持一致，分必做、选做和研究训练三个层级

★ 必做（核心概念）

- 3.1 写出7个物理量的量纲
- 3.2 检查6个关系的量纲齐次性
- 3.3 证明导数尺度变换
- 3.4 证明连续性方程无量纲形式
- 3.5 完整推导NS方程无量纲化（惯性尺度）
- 3.6 用黏性压强尺度重复推导
- 3.7 推导Strouhal数
- 3.8-3.10 Reynolds数计算（3题）

★★ 选做（进阶应用）

- 3.11 圆球阻力的 Π 定理分析
- 3.12 圆柱涡脱落 $St=f(Re)$
- 3.13-3.14 缩尺模型 Reynolds 相似
- 3.15 Re 与 Fr 同时匹配的讨论
- 3.16 三类模型试验的参数判断

★★★ 研究训练

- 3.17 论文中 Re 表述的完整性评价
- 3.18 CFD 有量纲输入的无量纲化
- 3.19 实验数据的两种作图方式
- 3.20 删除黏性项做法的评价
- 3.21 Boussinesq 方程完整无量纲化
- 3.22 两种尺度选择的形式比较

思考讨论：12个开放性问题（见教材），重点讨论"无量纲化不仅是消除单位""多种正确无量纲形式""动力相似核心"等方法论问题。

下章衔接：从无量纲化到精确解

本章建立的工具将在第4章直接用于求解 Navier–Stokes 方程的典型精确解

第3章：无量纲化告诉我们"哪些物理机制在竞争"

第4章：在特定几何和物理条件下，这些竞争关系如何决定精确的速度分布

第4章预览：Navier–Stokes 方程的典型精确解

Couette 流	平行平板间的剪切流动	尺度选择：U=U_w 作为速度尺度
Poiseuille 流	圆管/槽道中的压强驱动流	尺度选择：U_b 作为速度尺度，D_h 作为长度尺度
Stokes 第一/二问题	壁面起动/振荡的非定常流	尺度选择： $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ 作为自然长度尺度

课程思政：从无量纲化到精确解，体现了"从一般到特殊"的科学方法论——一般方程揭示普遍规律，特定条件下的精确解验证理论并提供工程基准解。

课堂互动：快问快答（总结性）

互动 7 / 8 • 概念速答

Q1

无量纲化的核心目的是什么？

→ 不是消除单位，而是将有量纲问题组织为少数无量纲参数控制的问题

Q2

Reynolds 数比较了哪两种作用？

→ 惯性作用与黏性作用（也等于黏性扩散时间/对流时间）

Q3

为什么 $1/Re$ 很小不能直接删黏性项？

→ 因为 $\nabla^2 u^*$ 在壁面附近可能很大，乘积仍可能 $O(1)$

Q4

Strouhal 数在什么情况下出现？

→ 当流动存在独立的外加时间尺度（周期振荡、涡脱落等）

Q5

动力相似的本质是什么？

→ 使控制当前问题的无量纲模型保持一致，不是简单匹配 Re

Q6

Buckingham Π 定理的局限是什么？

→ 能识别无量纲变量数量，但不能给出具体函数关系

数字赋能：CFD中的无量纲化与可靠性

CFD 是求解黏性流动控制方程的工具，无量纲化是其可靠性的基础



CFD 结果可靠性检查清单

- 网格：网格无关性验证，边界层内 y^+ 满足壁面模型要求
- 时间步长：非定常计算满足 CFL 条件，周期问题保证多个周期收敛
- 边界条件：与无量纲化一致，入口/出口/壁面条件明确
- 收敛：残差下降 3-5 个数量级，监控量（升阻力、流量）稳定
- 验证：与解析解（如 Poiseuille 流）、实验数据或经验关联式对比

无量纲化对 CFD 的三项直接作用：

1. 归并参数： $\rho, \mu, U, L, \Delta p \rightarrow Re$ 等少数控制参数，减少参数维数
2. 改善条件数：合理尺度使主要变量接近 $O(1)$ ，减小尺度悬殊
3. 便于验证：参数扫描围绕无量纲控制量组织，结果可跨流体/尺度比较

禁止：「计算软件给出了结果，因此结果正确」——CFD 结果必须经过验证和确认 (V&V)。

第3章 完

量纲分析与控制方程的无量纲化

黏性作用 → 方程 → 尺度 → 流动结构 → 工程应用

不要只讲公式，要讲公式背后的物理作用

黏性流体力学 · 徐翱